استمارة مستخلصات رسائل واطاريح الماجستير و الدكتوراه في جامعة البصرة

الكلية: كلية التربية للعلوم الصرفة
القسم: الرياضيات
التخصص:رياضيات تطبيقية

اسم الطالب:أسماء حمدان عنيد
اسم المشرف:د.هاشم عبد الخالق كشكول
الشهادة:ماجستير

عنوان الرسالة أو الأطروحة:

طريقة كالركن ضعيفة عنصر محدود لحل مشكلة الانتشار الحراري

ملخص الرسالة أو الأطروحة

في هذه الرسالة تم دراسة طريقة كالركن الضعيفة للعناصر المحددة لمسألة الحمل والانتشار ذات البعدين. حيث تم مناقشة حالتين, التقطيع الشبه تام والتقطيع التام لطريقة كالركن الضعيفة للعناصر المحددة، الفكرة الأساسية لطريقة كالركن الضعيفة للعناصر المحددة بأنها تستخدم الدالة الضعيفة (weak function) والمشتقات الضعيفة (weak gradient) المقابلة في الدالة الضعيفة للمسألة. وأثبتنا نظريا أنه.

A- **التقطيع الشبه تام لطريقة كالركن ضعيفة عنصر محدود.**

١. **خصائص النموذج صيغة الثنائية الخطية** $a(u_h,v)$ **:**

- **القضية 4.5.1 (الاستمرارية):** يكون النموذج ثنائي الخطية المحدد على V الفضاء المتوازي بالقاعدة $\|\cdot\|_V$ مستمرا إذا كان هناك ثابت موجب $C>0$ ، حيث

$$a(u_h,v)\le C\|u_h\|_{1^*,D}\|v\|_{1,D}\,.$$

- **القضية 4.5.2 (الخاصية الاهليجية):** لنفرض u_h هو حل المعادلة (4.4.1) و أن $\alpha>0$ ، فأن

$$a(u_h,u_h)\ge \alpha\|u_h\|^2_{1^*,D}\,.$$

- **المبرهنة (4.5.1) (الاستقرارية):** إذا كان هناك ثابت $C>0$ فأن:

$$\|u_0(x,t)\|^2_{L^2(D)}+C\|u_0(x,t)\|^2_{L^2(o,t;L^2(D))}\le\|u_0(x,0)\|^2_{L^2(D)}+\|f(x,t)\|^2_{L^2(o,t;L^2(D))}\,.$$

٢ - **قانون حفظ الطاقة:**

المبرهنة ٤.٦.١: الحل العددي للمعادلة (٤.٤.١)تحقق خاصية قانون حفظ الطاقة مع تدفق العددية q_h .

$$\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\int_T u_t\,dx\,dt+\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta}\int_{\partial T}q_h\cdot n\,ds\,dt=\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\int_T f\,dx\,dt\,.$$

٣. **تقدير الخطأ في الفضاء-** L^2 **:**

المبرهنة ٤.٧.١: نفرض $u\in H^{1+r}(\Omega)$ حل للمعادلة (٤.٣.١) و u_h حل للمعادلة (٤.٤.١). فأن يوجد $C>0$ بحيث:

$$\|u_h-u\|_{L^2(D)}\le Ch^{r+1}(\|u\|_{1+r}+\|u\|_{H^{1+r}(0,t;1+r)})\,.$$

B -التقطيع تام لطريقة كالركن ضعيفة عنصر محدود:

١ . **خصائص النموذج صيغة الثنائية الخطية $a(U_h^n, v)$;:**

• **القضية.4.9.1 (الاستمرارية):** يكون النموذج ثنائي الخطية المحدد على V الفضاء المتوازي بالقاعدة $\|\cdot\|_V$ مستمرا إذا كان هناك ثابت إيجابي $C > 0$ ، حيث

$$a(U_h^n, v) \le C \left\| U_h^n \right\|_{1^*, D} \|v\|_{1,D} \cdot$$

•**القضية 4.9.2 (الخاصية الاهليجية):** نفرض أن U_h^n يكون حل المعادلة (٤.٨.١) وان $\alpha > 0$ ، فأن

$$a(U_h^n, v) \le C \left\| U_h^n \right\|_{1^*, D} \|v\|_{1,D} \cdot$$

•**المبرهنة 4.9.1 (الاستقرارية):** إذا كان هناك ثابت M مستقل عن h حيث:

$$\left\| U_h^N \right\|_{L^2(D)}^2 + kM \sum_{n=1}^{N} \left\| U_0^n \right\|_{L^2(D)}^2 \le k \sum_{n=1}^{N} \| f(t_n) \|_{L^2(D)}^2 \cdot$$

٢ . **قانون حفظ الطاقة:**

المبرهنة(4.10.1)): الحل العددية للمعادلة (٤.٨.١) يحقق قانون الحفاظ الطاقة.

$$\int_{\Omega} \bar{\partial} U_h^n d\Omega = \int_{\Omega} f(t_n)\, d\Omega \cdot$$

٣. **تقدير الخطأ في الفضاء- L^2 :**

المبرهنة ٤.١١.١: نفرض $u \in H^{1+r}(\Omega)$ و u يمثل الحل للمعادلة (٤.٣.١) و U_h^n يمثل تقريب كالركن الضعيف للمعادلة (٤.٨.١).فأن يوجد $C > 0$ بحيث أن:

$$\left\| U_h^n - u^n \right\|_{L^2(D)} \le C(h^{1+r} \left\| u^n \right\|_{1+r} + k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|_{L^2(D)} ds) \cdot$$

College: College of Education for Pure Sciences University **Name of student**: Asmaa H.Aneed
Dept: Mathematics **Name of supervisor:** Hashim A.Kashkool
Certificate: Master **Secialization:** Applied Mathematics

Title of thesis

Weak Galerkin Finite Element Method for Solving Diffusion-Convection Problem

Abstract of thesis

The present thesis. applied and analyzed the weak Galerkin (WG) finite element method for non-steady two dimensional convection-diffusion problems on conforming polygon. Here two cases are discussed; semi- discrete and full- discrete weak Galerkin (WG) finite element method. The main idea of WG finite element method is the use of weak functions and their corresponding discrete weak derivatives in standard weak form of the model problem. The theoretical evidence proved that;

A- **semi- discrete weak Galerkin finite element method;**

1. **Properties of the bilinear form** $a(u_h, v)$ **:**

- **Lemma 4.5.1(continuity):** A bilinear form defined on V space equipped with norm $\|\cdot\|_V$ is continuous if there is a positive constant $C > 0$, such that

$$a(u_h, v) \leq C\|u_h\|_{1^*,D}\|v\|_{1,D} \cdot$$

- **Lemma 4.5.2 (V-elliptic):** Let u_h be the solution of equation (4.4.1) , then there exists a positive constant $\alpha > 0$, such that

$$a(u_h, u_h) \geq \alpha\|u_h\|^2_{1^*,D} \cdot$$

- **Theorem(4.5.1) (stability) :** There exists a constant $C > 0$, such that:

$$\|u_0(x,t)\|^2_{L^2(D)} + C\|u_0(x,t)\|^2_{L^2(o,t;L^2(D))} \leq \|u_0(x,0)\|^2_{L^2(D)} + \|f(x,t)\|^2_{L^2(o,t;L^2(D))} \cdot$$

2. **The energy conservation law:**

Theorem (4.6.1): The numerical approximation from the weak Galerkin finite element method satisfied the energy conservation property with a numerical flux q_h.

$$\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\int_T u_t dx\,dt + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\int_{\partial T} q_h \cdot n\,ds\,dt = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\int_T f\,dx\,dt \cdot$$

3. **The error estimate in** L^2 **-norm;**

Theorem (4.7.1): Let $u \in H^{1+r}(\Omega)$ the solution of problem (4.3.1) and u_h be the weak Galerkin approximation of equation (4.4.1) .Then, there exists a constant C such that.

$$\|u_h - u\|_{L^2(D)} \leq Ch^{r+1}(\|u\|_{1+r} + \|u\|_{H^{1+r}(0,t;1+r)}) .$$

B- **full- discrete weak Galerkin (WG) finite element method;**

1. **Properties of the bilinear form** $a(U_h^n, v)$ **:**

- **Lemma(4.9.1)(continuity):** A bilinear form defined on V space equipped with norm $\|\cdot\|_V$ is continuous if there is a positive constant $C > 0$, such that

$$a(U_h^n, v) \le C\|U_h^n\|_{1^*,D}\|v\|_{1,D} \cdot$$

- **Lemma(4.9.2)(V-elliptic):** Let U_h^n be the solution of equation (4.8.1) then, there exist a positive constant $\alpha > 0$,

$$a(U_h^n, U_h^n) \ge \alpha\|U_h^n\|_{1^*,D}^2 \cdot$$

- **Theorem(4.9.1)(stability):** There exist a constant M independent of h such that,

$$\|U_h^N\|_{L^2(D)}^2 + kM\sum_{n=1}^{N}\|U_0^n\|_{L^2(D)}^2 \le k\sum_{n=1}^{N}\|f(t_n)\|_{L^2(D)}^2 \cdot$$

2. **The energy conservation law;**

Theorem(4.10.1): The numerical solution of equation (4.8.1) satisfies the energy conservation law.

$$\int_\Omega \bar{\partial} U_h^n d\Omega = \int_\Omega f(t_n)\, d\Omega \cdot$$

3. **The error estimate in** L^2 **-norm;**

Theorem (4.11.1): Let $u \in H^{1+r}(\Omega)$ be the solution of (4.3.1) and U_h^n be the weak Galerkin approximation of equation (4.8.1). Then, there exists a constant C such that.

$$\|U_h^n - u^n\|_{L^2(D)} \le C(h^{1+r}\|u^n\|_{1+r} + k\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|_{L^2(D)} ds) \cdot$$